19/11/15

Φροντιστηριακές ασκήσεις #3

Ασκηση 1

Λύση

Βήμα 1: Γραμμοπράξεις $r_2 \mapsto r_2 - 2r_1$

Βήμα 2: Γραμμοπράξεις $r_3 \mapsto r_3 - r_1$

άρα $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -16 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Βήμα 3: Ανάπτυξη ως προς 1η στήλη άρα

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -5 & 12 & -16 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad ①$$

Βήμα 4: Στον πίνακα ① γραμμοπράξη $r_1 \mapsto r_1 + 5r_3$

Βήμα 5: Μετά γραμμοπράξη $r_2 \mapsto r_2 + 3r_3$

Άρα $\det A = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Ανάπτυξη 1η στήλη}} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 = 1$

Άσκηση 2

<u>Α' τρόπος</u>

$B \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_6} B_1 \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_5} B_2 \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} B_3$

άρα ($\det B_1 = -\det B$) • $\det B_2 = -\det B_1 = -\det B = \det B$

• $\det B_3 = -\det B_2 = -\det B$ (*)

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αφού B_3 άνω τριγωνικός $\det B_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ (**)

Από (*) κ' (**) $6! = -\det B \Rightarrow \det B = -6! = -720$

<u>Β' τρόπος</u>

Ανάπτυξη ως προς την 1η στήλη $\rightarrow$ ανάγεται σε 5×5 ορίζουσα και συνεχίζουμε παρόμοια

Ασκηση 3

Βήμα 1: Αφαιρούμε την $1^η$ στήλη από την $2^η$

Βήμα 2: Αφαιρούμε την $1^η$ στήλη από την $3^η$

Άρα $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{1η γραμμή}]{\text{Αναπτύσσω}} \begin{bmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ (\beta-\alpha)(\beta+\alpha) & (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{vmatrix} = (\beta-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \gamma-\alpha \\ \beta+\alpha & (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha) \end{vmatrix}$$

$$= (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta+\alpha & \gamma+\alpha \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

~

Ερώτημα $1^ο$: Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$ και $k \in F$. Ποια είναι η $\det(kA)$;

Απάντηση: $\det(k \cdot A) = k^{\nu} \cdot \det(A)$

Ερώτημα $2^ο$: Έστω $A \in F^{\nu \times \nu}$ αντιστρέψιμος. Βρείτε την ορίζουσα του αντιστρόφου.

Απάντηση: $A \cdot A^{-1} = I_\nu \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_\nu = 1 \Rightarrow$
$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1_F \Leftrightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = (\det A)^{-1}$

π.χ. $\det A = 10 \rightarrow (\det A)^{-1} = \dfrac{1}{10}$

Άσκηση 5

$A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $\quad A^2+2A = \mathbb{O}_{3\times3}$

$A^2+2A+I_3 = I_3$, αλλά A, I_3 μετατίθενται άρα

$(A+I_3)^2 = I_3 \Rightarrow (A+I_3)(A+I_3) = I_3$ $(**)$

από $(A+I_3)(A+I_3) = I_3$, $A+I_3$ αντιστρέφεται
και $(A+I_3)^{-1} = A+I_3$

$A^2+2A = \mathbb{O} \Rightarrow A^2 = (-2)\cdot A$ ~~από~~ $(***)$
Παίρνοντας ορίζουσες στην $(***)$

$\det A^2 = \det((-2)\cdot A) \Rightarrow$
$\det A \cdot \det A = (-2)^3 \cdot \det A \Rightarrow$
$(\det(A))^2 = -8 \cdot \det A$ ①

Συμπέρασμα: Δύο περιπτώσεις
1) $\det A = 0$ (Μπορεί να συμβεί π.χ. $A = \mathbb{O}_{3\times3}$)

2) $\det A \neq \mathbb{O}_{3\times3}$. Τότε διαιρώντας με $\det A$ η
① δίνει $\det A = -8$. Αυτό μπορεί να συμβεί
π.χ. $A = -2I_3$

$A \in F^{\nu\times\nu}$
$\lambda \in F$ $\quad \det(\lambda\cdot A) = \lambda^{\nu}\cdot\det(A)$

Ασκηση ???

Να βρεθούν οι τιμές του μιγαδικού α ώστε να αντιστρέφεται ο πίνακας:

$$B = \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & \alpha & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Λύση:

Έχουμε B αντιστρέφεται $\Leftrightarrow \det B \neq 0$. Υπολογίζουμε $\det B$ με ανάπτυξη ως προς την $1^{η}$ γραμμή.

Έχουμε $\det B = i \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & 4 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + i \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$

$$= i(4+\alpha) + i(\alpha - 2) = 2i\alpha + 2i = 2i(\alpha+1)$$

Επομένως ο B αντιστρέφεται $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{C}$ και $\alpha \neq -1$

Ασκηση 8

π.χ. $n=4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1: Αφαιρούμε $1^{η}$ γραμμή από $2^{η}$

Βήμα 2: Αφαιρούμε " " από $3^{η}$

Βήμα 3: Αφαιρούμε " από $4^{η}$

Παίρνουμε $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ που έχει ορίζουσα $(-1)^3 = -1$

Γενικά: Για $n\times n$ αφαιρώντας την $1^{η}$ γραμμή από την $2^{η}$, την $3^{η}$ ... $n^{η}$ γραμμή έχουμε $\det B = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}$ που

είναι άνω τριγωνικός και έχει ορίζουσα $1(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$

άρα $\det = (-1)^{n-1}$

Ασκηση !!!

Να βρεθούν οι τιμές του μιγαδικού α ώστε να αντιστρέφεται ο πίνακας:

$$B = \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & \alpha & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

Λύση:

Έχουμε B αντιστρέφεται $\Leftrightarrow \det B \neq 0$. Υπολογίζουμε $\det B$ με ανάπτυξη ως προς την $1^{η}$ γραμμή.

Έχουμε $\det B = i \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & 4 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + i \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$

$= i(4+\alpha) + i(\alpha - 2) = 2i\alpha + 2i = 2i(\alpha+1)$

Επομένως ο B αντιστρέφεται $\Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{C}$ και $\alpha \neq -1$

Ασκηση 8

π.χ. $n=4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1: Αφαιρούμε $1^{η}$ γραμμή από $2^{η}$

Βήμα 2: Αφαιρούμε " " από $3^{η}$

Βήμα 3: Αφαιρούμε " από $4^{η}$

Παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

που έχει ορίζουσα $(-1)^3 = -1$

Γενικά: Για $n\times n$ αφαιρώντας την $1^{η}$ γραμμή από την $2^{η}$, την $3^{η}$ ... $n^{η}$ γραμμή έχουμε $\det B = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}$ που

είναι άνω τριγωνικός και έχει ορίζουσα $1(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$

άρα $\det = (-1)^{n-1}$

Υπενθύμιση: Έστω F σώμα. Ορίσαμε διανυσματικό $(V,+,\cdot)$ επί του F (ή πιο απλά V) όπου
$+: V\times V \to V$ πρόσθεση στο V
$\cdot: F\times V \to V$ βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Παρατήρηση

i) Το στοιχείο 0_V με την ιδιότητα $0_V+w=w+0_V=w$ ① $\forall\, w\in V$ είναι μοναδικό

Απόδειξη

Έστω $z+w=w+z=w$ $\forall\, w\in V$. Θ.δ.ο $z=0_V$

Πράγματι $0_V=0_V+z=z$

ii) Αν $v\in V$ το στοιχείο $v\in V$ με την ιδιότητα $v+(-v)=0_V$ είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω $z\in V$ με $z+v=v+z=0_V$. Τότε μοναδικό. Πράγματι, έστω $z\in V$ με $z+v=v+z=0_V$. Τότε:

$z=z+0_V=z+(v+(-v))=(z+v)+(-v)=0_V+(-v)=v$

Πρόταση: Έστω F σώμα και V διανυσματικός χώρος επί του F. Τότε ισχύουν:

i) Για κάθε $\lambda\in F$ έχουμε $\lambda\cdot 0_V=0_V$

ii) Για κάθε $v\in V$ έχουμε $0_F\cdot v=0_V$

iii) Αν για κάθε $\lambda\in F$, $v\in V$ ισχύει $(-\lambda)\cdot v=-(\lambda v)=\lambda(-v)$

iv) Αν για τα στοιχεία $\lambda\in F$, $v\in V$ ισχύει $\lambda v=0_V$, τότε $\lambda=0_F$ ή $v=0_V$

(Ισοδύναμα, αν $\lambda\neq 0_F$ ή $v\neq 0_V$ τότε $\lambda v\neq 0_V$)

Απόδειξη

-Έχουμε $\lambda\cdot 0_V=\lambda(0_V+0_V)\overset{①}{=}\lambda\cdot 0_V+\lambda\cdot 0_V$. Προσθέτοντας στην ① το στοιχείο $-(\lambda\cdot 0_V)$ έχουμε $0_V=\lambda\cdot 0_V$

ii) Παρόμοια το 1

iii) Ομοίως

iv) Έστω $\lambda \in F$, $v \in V$ και $\lambda \cdot v = 0_V$ (*). Υποθέτουμε $\lambda \neq 0_F$ και $v \neq 0_F$ και θα βρούμε αντίφαση. Αφού $\lambda \neq 0_F$ και F σώμα υπάρχει το $\lambda^{-1} \in F$. Τότε (*) $\Rightarrow \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda v \Rightarrow (\lambda^{-1} \lambda) \cdot v = \lambda \cdot 0_V = 1_F v = 0_V$

Αντίφαση!

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος F και $A \subseteq V$. Το A λέγεται διανυσματικός ή γραμμικός ή υπόχωρος του V αν:

i) $0_V \in A$

ii) Αν $u, w \in A$ τότε $u + w \in A$

iii) Αν $\lambda \in F$ και $u \in A$, τότε $\lambda u \in A$

Παρατήρηση: Αν A υπόχωρος του V γράφουμε $A \leq V$. Αν ο A είναι υπόχωρος του V τότε ο A με τον περιορισμό των πράξεων $+, \cdot$ γίνεται διανυσματικός χώρος επί του F. (Δηλαδή για $u, v \in A$ $u+v$ είναι η πρόσθεση V, και για $\lambda \in F$, $u \in A$, λu είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στο V.